Tentamen Systeemtheorie 1, donderdag 19 april 2012

Graag uw naam en studenten-nummer vermelden. Het tentamen bestaat uit 5 vraagstukken. De puntenverdeling kunt u onder aan het tentamen vinden. Bij het beantwoorden van de vraagstukken dient u een toelichting op het antwoord te geven.

1. We bekijken het niet-lineaire systeem, beschreven door

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}x_1 &= -3x_2 - x_1^5 \\
\frac{d}{dt}x_2 &= 2x_2 + x_1^5 + u(1 - x_1)
\end{aligned}
$$

   Hierin is u een input.

   a. Laat zien dat $(x^*, u^*) = (0, 0)$ een evenwichtspunt is.

   b. Bepaal de linearisatie van het systeem rond dit evenwichtspunt.

   c. Laat zien dat dit evenwichtspunt instabiel is.

   d. Ga na dat het gelineariseerde systeem regelbaar is.

   e. Bereken een toestandsterugkoppeling $u = f_1x_1 + f_2x_2$ die het gelineariseerde systeem asymptotisch stabiel maakt.

   f. Laat zien dat de onder e. gevonden regelwet (toegepast op het oorspronkelijke niet-lineaire systeem) er voor zorgt dat het evenwichtspunt $(0, 0)$ locaal asymptotisch stabiel wordt.

2. Beschouw het systeem

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\
y &= (1 \quad 0)x,
\end{aligned}
$$

   a. Is dit systeem asymptotisch stabiel?

   b. Bepaal een toestandsterugkoppeling $u = fx$ zodanig dat het karakteristieke polynoom van het geregelde systeem gelijk is aan $(1 + \xi)^2$.

   c. Ontwerp voor het systeem een waarnemer zodanig dat het karakteristieke polynoom van het systeem dat de schattingsfout beschrijft gelijk is aan $1 + \xi + \xi^2$.

   e. Gebruik het separatieprincipe om voor het systeem een output feedbackregelaar te ontwerpen zodat het karakteristieke polynoom van het geregelde systeem gelijk is aan $(1 + \xi)^2(1 + \xi + \xi^2)$.

3. Stel $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Laat $R \subseteq \mathbb{R}^n$ de regelbaarheidsdeelruimte zijn van (A, B), i.e.,

$$
R = \operatorname{im}\begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix}.
$$

a. Bewijs dat R een A-invariante deelruimte is.

b. Bewijs dat $\mathrm{im}(B) \subseteq R$.

c. Bewijs dat als L een deelruimte van $\mathbb{R}^n$ is die A-invariant is en voldoet aan $\mathrm{im}(B) \subseteq L$, dan geldt $L \subseteq R$.

4. Stel dat

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

met $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ en $y \in \mathbb{R}^p$ regelbaar en waarneembaar is. Stel dat K een $n \times p$ matrix is, en dat $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ en $T \in \mathbb{R}^{p\times p}$ niet-singuliere matrices zijn.

a. Bewijs dat

$$\frac{dx}{dt} = S(A + KC)S^{-1}x + SBRu, \quad y = TCS^{-1}x$$

ook waarneembaar.

b. Is het systeem uit onderdeel a.) regelbaar? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

5. Gegeven zijn twee systemen:

$$\frac{d}{dt}x_1 = a_1x_1 + b_1u_1, \quad y_1 = c_1x_1, \quad x_1, u_1, y_1 \in \mathbb{R} \tag{1}$$

en

$$\frac{d}{dt}x_2 = a_2x_2 + b_2u_2, \quad y_2 = c_2x_2, \quad x_2, u_2, y_2 \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Beschouw nu de serie-schakeling van deze systemen, verkregen door te stellen $u_2 = y_1$.

a. Bepaal de toestandsruimte vergelijkingen van de serie-schakeling

b. Bepaal nodige en voldoende voorwaarden waaronder de serie-schakeling waarneembaar is.

1	18 punten
2	18 punten
3	18 punten
4	18 punten
5	18 punten

(10 punten gratis)